Unité d'Enseignement CORO
Compléments et outils de recherche opérationnelle

Analyse de sensibilité et paramétrisation en PL

ENSIIE
E. Soutil

UE CORO – Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision – Plan du cours

- Partie 1 – Compléments de PL
  - *Dualité*
  - *Analyse de sensibilité / Paramétrisation*
- Partie 2 – PLNE
- Partie 3 – Métaheuristiques
- Partie 5 – Dualité lagrangienne

2. Unicité de la solution optimale

- Si dans le tableau **optimal** de (P), on a pour toute variable x_j **hors base** $\Delta_j < 0$, alors **la solution optimale est unique**.
- Sinon la solution optimale n'est pas unique.
- **Exemple :**

$$\begin{cases} \text{Max } Z = 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} -3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ \;\;\, 3x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ \;\;\;\;\; x_1 \qquad\;\;\; \leq 3 \\ \;\;\; x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Unicité de la solution optimale

- **Tableau optimal :**

B	x_1	x_2	$x_{\bar{1}}$	$x_{\bar{2}}$	$x_{\bar{3}}$	$\bar{b}$
$x_{\bar{1}}$	0	0	1	-1	6	6
x_2	0	1	0	1/2	-3/2	7/2
x_1	1	0	0	0	1	3
Δ	0	0	0	-4	0	-32

- On obtient un **autre tableau optimal** en faisant entrer en base $x_{\bar{3}}$:

B	x_1	x_2	$x_{\bar{1}}$	$x_{\bar{2}}$	$x_{\bar{3}}$	$\bar{b}$
$x_{\bar{3}}$	0	0	1/6	-1/6	1	1
x_2	0	1	1/4	1/4	0	5
x_1	1	0	-1/6	1/6	0	2
Δ	0	0	0	-4	0	-32

Paramétrisation des coefficients de la fonction objectif

- Considérons le problème **paramétré** (de paramètre $\boldsymbol{\lambda \geq 0}$) suivant :

$$\begin{cases} \text{Max } Z = \lambda x_1 + 12\, x_2 + 3x_3 \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} x_1 \leq 1000 \\ x_2 \leq \ \ 500 \\ x_3 \leq 1500 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 6750 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

- Le tableau optimal correspondant à $\boldsymbol{\lambda = 4}$ est le suivant :

B	x_1	x_2	x_3	$x_{\bar{1}}$	$x_{\bar{2}}$	$x_{\bar{3}}$	$x_{\bar{4}}$	$\bar{b}$
x_1	1	0	0	0	-2	-2/3	1/3	250
x_2	0	1	0	0	1	0	0	500
$x_{\bar{1}}$	0	0	0	1	2	2/3	-1/3	750
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1500
Δ	0	0	0	0	-4	-1/3	-4/3	-11 500

Paramétrisation des coefficients de la fonction objectif

- À partir de la solution précédente, il est possible de recalculer les coûts réduits en fonction de λ (en ré-écrivant la fonction objectif) :

B	x_1	x_2	x_3	$x_{\bar{1}}$	$x_{\bar{2}}$	$x_{\bar{3}}$	$x_{\bar{4}}$	$\bar{b}$
x_1	1	0	0	0	-2	-2/3	1/3	250
x_2	0	1	0	0	1	0	0	500
$x_{\bar{1}}$	0	0	0	1	2	2/3	-1/3	750
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1500
Δ	0	0	0	0	$2\lambda - 12$	$\frac{2}{3}\lambda - 3$	$-\frac{1}{3}\lambda$	

Tableau 1

- On peut dès lors déterminer les valeurs de λ pour lesquels la solution précédente reste optimale en considérant le tableau des signes des Δ_j :

λ	0		$\frac{9}{2}$		6		+∞
2λ-12		-		-	0	+	
2/3λ-3		-	0	+		+	
-1/3λ	0	-		-		-	

Le tableau 1 précédent reste optimal pour $0 \leq \lambda \leq \frac{9}{2}$

Paramétrisation des coefficients de la fonction objectif

- À l'inverse, le tableau 1 n'est plus optimal pour $\lambda > \frac{9}{2}$: $\Delta_{\bar{3}}$ devient positif. Considérons le nouveau tableau (tableau 2) obtenu en faisant entrer x_3 en base (c'est alors $x_{\bar{1}}$ qui sort) :

B	x_1	x_2	x_3	$x_{\bar{1}}$	$x_{\bar{2}}$	$x_{\bar{3}}$	$x_{\bar{4}}$	$\bar{b}$
x_1	1	0	0	1	0	0	1/3	1000
x_2	0	1	0	0	1	0	0	500
$x_{\bar{3}}$	0	0	0	3/2	3	1	-1/3	1125
x_3	0	0	1	-3/2	-3	0	0	375
Δ	0	0	0	$\frac{9}{2} - \lambda$	-3	0	-3/2	

Tableau 2

- Le tableau 2 est optimal pour $\lambda > \frac{9}{2}$

Paramétrisation des coefficients de la fonction objectif

- **Conclusion :**

λ	0 — $9/2$	$9/2$ — $+\infty$
	Tableau 1 optimal Solution unique $x_1 = 250, x_2 = 500, x_3 = 1500$	**Tableau 2 optimal** Solution unique $x_1 = 1000, x_2 = 500, x_3 = 375$

Pour λ=9/2, les tableaux 1 et 2 sont optimaux

Paramétrisation du second membre

- Par passage au dual, on peut également étudier la paramétrisation du second membre :

$$(P)\begin{cases} \text{Min } w = 1000y_1 + 500y_2 + 1500y_3 + 6750y_4 \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} y_1 + 3y_4 \geq \lambda \\ y_1 + 6y_4 \geq 12 \\ y_3 + 2y_4 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Passage au dual

$$(D)\begin{cases} \text{Max } Z = \lambda x_1 + 12\, x_2 + 3x_3 \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} x_1 \leq 1000 \\ x_2 \leq 500 \\ x_3 \leq 1500 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 6750 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

- La résolution de (D), déjà étudiée, permettra la résolution de (P)

Paramétrisation du second membre

- **Tableau des solutions** (cf. règle de passage du tableau primal optimal au tableau dual optimal) :

λ	0 — $9/2$	$9/2$ — $+\infty$
	Solution optimale : $y_1 = 0,\ y_2 = -2\lambda + 12,\ y_3 = -\frac{2}{3}\lambda + 3,\ y_4 = \frac{1}{3}\lambda$	**Solution optimale :** $y_1 = \lambda - 9/2,\ y_2 = 3,\ y_3 = 0,\ y_4 = 3/2$